TENTO PROJEKT JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY

M\_3\_12

**Pracovní list**

Téma: Matematická indukce

Zpracovala: RNDr. Alena Šedivá

MATEMATICKÁ INDUKCE

Matematická indukce je druh důkazu, který používáme při dokazování vlastností přirozených čísel.

Příklad:

**Dokažte matematickou indukcí, že pro všechna přirozená čísla *n* platí:**

**2 + 4 + 6 + .........+2*n* = *n*(*n* + 1)**

Znamená to, že když do tohoto vztahu dosadíme jakéko-li přirozené číslo, dostaneme pravdivý výrok o rovnosti čísel.

např.

*n* = 1 2.1 = 1(1 + 1) L = 2

P = 2 L = P

*n* = 3 2 + 4 + 2.3 = 3(3 + 1) L = 12

P = 12 L = P

*n* = 5 2 + 4 + 6 + 8 + 2.5 = 5(5 + 1) L = 30

P = 30 L = P

Že tento vztah platí pro každé přirozené číslo dokážeme matematickou indukcí. Tento důkaz se skládá ze dvou kroků:

1. Dokážeme, že daný vztah platí pro *n =* 1.
2. Předpokládáme, že daný vztah platí pro přirozené číslo *k* a dokážeme, že jestliže vztah platí pro číslo *k ,* pak platí pro číslo *k* + 1.

1. krok

*n* = 1 2.1 = 1(1 + 1) L = 2

P = 2 L = P

2. krok

*n* = *k* 2 + 4 + 6 + .........+2*k* = *k*(*k* + 1) tzv. indukční předpoklad

*n* = *k* + 1 2 + 4 + 6 + .........+2*k +* 2(*k* + 1) = (*k* + 1)( *k* + 1 + 1) dokazujeme rovnost výrazu

Levou stranu upravíme s využitím indukčního předpokladu:

L = **2 + 4 + 6 + .........+2*k***  *+* 2(*k* + 1) = ***k*(*k* + 1)** + 2(*k* + 1) = (*k* + 1)(*k* + 2)

P = (*k* + 1)( *k* + 1 + 1) = (*k* + 1)(*k* + 2) L = P

Závěr: Dokázali jsme, že levá strana výrazu se rovná pravé straně výrazu a tím jsme dokázali, že daná vlastnost platí pro všechna přirozená čísla. Platí pro číslo 1 a pro číslo o jedničku větší, tzn pro číslo 2 a zase pro číslo o jedničku větší, tzn pro číslo 3 atd.

Dokažte matematickou indukcí, že pro všechna přirozená čísla *n* platí:

a) 12 + 22 + 32 + ........+ *n*2 =

b) + + . . += 1-

c) 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + . . . .n(n + 1)(n + 2) = n(n + 1)(n + 2)(n + 3)

d) 13 + 23 + 33 + . . . .+ *n3* = n2(n + 1)2

e) 1 + 3 + 5 + . . . + (2*n* – 1) = *n2*

Literatura:

BENDA, P. a kol. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. Praha: SPN, 1988